ΘΕΜΑ Α

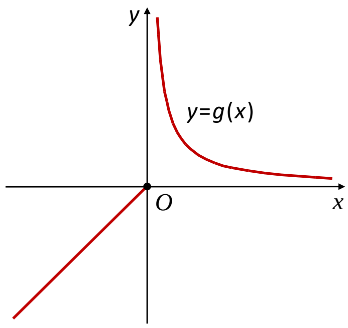
Α1. Απόδειξη θεωρήματος σελ. 99 σχολικού βιβλίου.

Α2. **α.** **Ψευδής**

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x, & x\le 0\end{cases}$$

η οποία έχει γραφική παράσταση (σχήμα σχολικού βιβλίου σελ.35):



Η $g(x)$ είναι συνάρτηση 1−1 στο $A_g = R$ αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο R αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ όπως φαίνεται από το παραπάνω σχήμα.

Α3. Διατύπωση θεωρήματος σελ. 216 σχολικού βιβλίου.

Α4. **α. Λάθος** (σελ. 33 σχ. βιβλίου)
β. Λάθος (σχόλιο σελ. 136 σχ. βιβλίου)
γ. Σωστό (τύπος σελ. 53 σχ. βιβλίου)
δ. Σωστό (σελ. 37 σχ. βιβλίου)
ε. Σωστό (σελ. 17 σχ. βιβλίου)

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$A_1=(-\infty,0), A_2=(0,+\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x)=1+\frac{8}{x^3}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x^3+8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^3+8}{x^3}=0\Leftrightarrow x^3+8=0\Leftrightarrow x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$$

Για να βρούμε το πρόσημο της f' θα βρούμε το πρόσημο του $\dfrac{x^3+8}{x^3}$ με βάση το παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3+8		-	0	+		+	
x^3		-		-	0	+	
$x^3\cdot\left(x^3+8\right)$		+		-		+	

Άρα το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	$\Vert$	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,-2\right]$ και $\left(0,+\infty\right)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-2,0\right)$

Στην θέση $x_0=-2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f\left(-2\right)=-3$

B2. Η $f'\left(x\right)=1+\dfrac{8}{x^3}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα

$A_1=\left(-\infty,0\right), A_2=\left(0,+\infty\right)$ με παράγωγο :

$$f''\left(x\right)=-\frac{24}{x^4}<0 \text{ για κάθε } x\neq 0$$

άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,0\right)$ και $\left(0,+\infty\right)$

Β3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη θα αναζητήσουμε στο $x=0$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-4}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left[\left(x^3-4\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right] = -\infty$$

Διότι : $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim_{x\to 0^+}\left(x^3-4\right) = -4$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-4}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\left[\left(x^3-4\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right] = (-4)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Διότι : $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = +\infty$ και $\lim_{x\to 0^-}\left(x^3-4\right) = -4$

Άρα η ευθεία $x=0$ (ο άξονας $y'y$) κατακόρυφη ασύμπτωτη της f .

Πλάγιες –Οριζόντιες θα αναζητήσουμε στο $+\infty$ και στο $-\infty$

Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) αρκεί τα όρια $\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$ να είναι πραγματικοί αριθμοί (αντιστοίχως $\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$

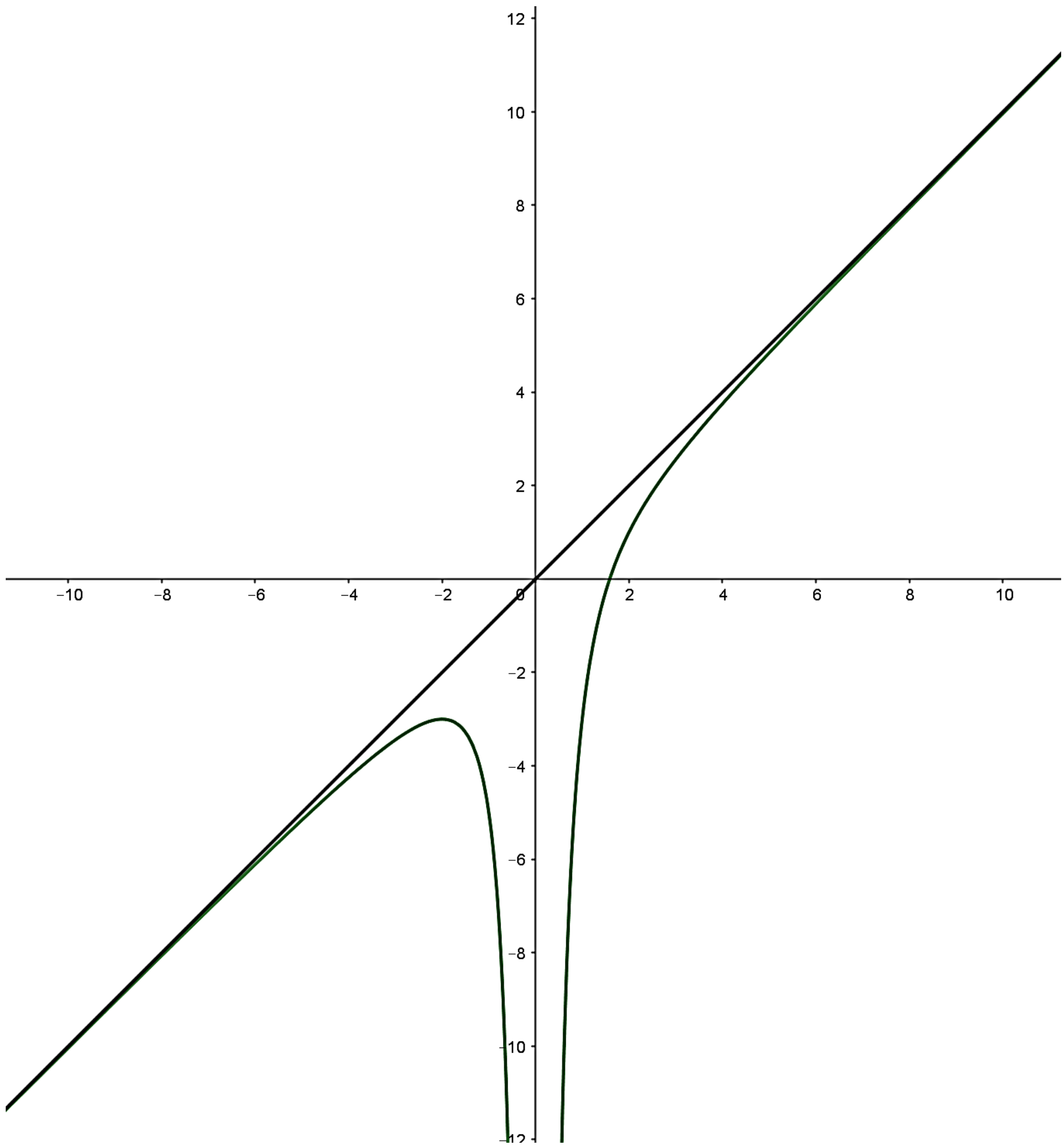
Επίσης

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4-x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{x^2} = 0$$

Άρα η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

B4. Με βάση τα παραπάνω ερωτήματα η γραφική παράσταση της f είναι η παρακάτω :



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πλευρά του τετραγώνου θα έχει μήκος $\frac{x}{4}$m

Άρα, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι : $E_\tau = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}m^2$.

Το μήκος του κύκλου θα είναι $L=(8-x)m$ και επειδή $L=2\pi\rho$, ο κύκλος θα έχει ακτίνα $\rho=\frac{8-x}{2\pi}m$,επομένως το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με :

$$E_\kappa = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}m^2$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{(8-x)^2}{4\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}\text{, με } 0<x<8$$

Γ2.
Η $E(x)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $(0,8)$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με:

$$E'(x)=\frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}$$

$$E'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{32}{\pi+4}$$

Το πρόσημο της $E'(x)$ και η μονοτονία της $E(x)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα τιμών:

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
$E'(x)$	‖	-		+	‖
$E(x)$	‖	↘		↗	‖

Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων γίνεται ελάχιστο για $x=\dfrac{32}{\pi+4}$,

Όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι $x=\dfrac{32}{\pi+4}$ τότε

$$\text{διάμετρος}=2\rho=2\frac{8-x}{2\pi}=\frac{8-x}{\pi}=\frac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{32}{\pi+4}$$

Επομένως το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου

Γ3.

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,8)$.

Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ οπότε

$$E(\Delta_1)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to0}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ οπότε

$$E(\Delta_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to8^-}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

Αφού το $5\in E(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο Δ_1, η οποία είναι μοναδική αφού $E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

Τέλος το $5\notin E(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $E(x)=5$ είναι αδύνατη στο Δ_2.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x$ και $f''(x)=2e^{x-\alpha}-2$

Επομένως

$$f''(x)\geq0\Leftrightarrow2e^{x-\alpha}-2\geq0\Leftrightarrow2e^{x-\alpha}\geq2\Leftrightarrow e^{x-\alpha}\geq1\Leftrightarrow x-\alpha\geq0\Leftrightarrow x\geq\alpha$$

Άρα :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\frown$		$\smile$	

Στο διάστημα $(-\infty,\alpha]$ η f κοίλη ενώ στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$ η f κυρτή.

Το σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$ δηλαδή $M(\alpha,2-\alpha^2)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f

Δ2.

- Εφόσον η f'' κοίλη στο $A_1=(-\infty,\alpha]$ άρα η f' γνησίως φθίνουσα σε αυτό .

Επειδή η f' συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-\infty,\alpha]$ το σύνολο τιμών της θα είναι :

$$f'(A_1)=\left[f'(\alpha),\lim_{x\to-\infty}f'(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$$

διότι :

$$f'(\alpha)=2e^{\alpha-\alpha}-2\alpha=2-2\alpha=2(1-\alpha)<0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{e^{\alpha}}e^{x}-2x\right)=+\infty$$

Το $0\in f'(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in A_1$ ώστε $f'(x_1)=0$,το x_1 μοναδικό διότι η f' γνησίως φθίνουσα στο A_1

- Εφόσον η f'' κυρτή στο $A_2=[\alpha,+\infty)$ άρα η f' γνησίως αύξουσα σε αυτό .

Επειδή η f' συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[\alpha,+\infty)$ το σύνολο τιμών της θα είναι :

$$f'(A_2)=\left[f'(\alpha),\lim_{x\to+\infty}f'(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty)$$

διότι : $f'(\alpha)=2e^{\alpha-\alpha}-2\alpha=2-2\alpha$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{e^{\alpha}}e^{x}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{2}{e^{\alpha}}\frac{e^{x}}{x}-2\right)\right]=+\infty$

Σημειώνουμε ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

Το $0\in f'(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in A_2$ ώστε $f'(x_2)=0$, το x_2 μοναδικό διότι η f' γνησίως φθίνουσα στο A_2

Στο διάστημα $(-\infty,\alpha]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα και έχει μοναδική ρίζα την $x=x_1$ οπότε το πρόσημό της είναι :

Για $x<x_1\Leftrightarrow f'(x)>f'(x_1)\Leftrightarrow f'(x)>0$

Για $x_1<x<\alpha$ τότε $f'(x)<f'(x_1)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα και έχει μοναδική ρίζα την $x=x_2$ οπότε το πρόσημό της είναι :

Αν $\alpha<x<x_2$ τότε $f'(x)<f'(x_2)\Leftrightarrow f'(x)<0$

Αν $x>x_2$ τότε $f'(x)>f'(x_2)\Leftrightarrow f'(x)>0$

x	$-\infty$ x_1		α	x_2 $+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Άρα η f παρουσιάζεις στην θέση $x=x_1$ τοπικό μέγιστο και στην θέση $x=x_2$ τοπικό ελάχιστο

Δ3.

Θα δείξουμε ότι ο αριθμός 1 βρίσκεται στο διάστημα (x_1,α)

Αποκλείεται να βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha,+\infty)$ διότι από υπόθεση $\alpha>1$

Έστω $1\le x_1$ επειδή η f' γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,x_1]$ ισχύει
$f'(1)\ge f'(x_1)\Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}-2\ge 0\Leftrightarrow 2e^{1-\alpha}\ge 2\Leftrightarrow e^{1-\alpha}\ge 1\Leftrightarrow 1-\alpha\ge 0\Leftrightarrow \alpha\le 1$ άτοπο

Άρα ο αριθμός 1 βρίσκεται στο διάστημα (x_1,α)

Επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο (x_1,x_2) άρα και στο διάστημα $(\alpha,x_2)\subseteq(x_1,x_2)$ η εξίσωση $f(x)=f(1)$ ισοδυναμεί με την $x=1$ (η f 1-1) η οποία ως λύση απορρίπτεται διότι $x\in(\alpha,x_2)$ με $\alpha>1$ άρα και $x>1$

Άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α,x_2)

Δ4

Για $\alpha=2$: $f(x)=2e^{x-2}-x^2$ και $f'(x)=2e^{x-2}-2x$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=2$ είναι η

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y+2=-2(x-2)\Rightarrow y=-2x+2$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $[2,+\infty)$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης βρίσκεται κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $f(x)\ge y\Rightarrow f(x)\ge -2x+2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=2$.

Άρα για $x\ge 2$ είναι $f(x)\ge -2x+2 \overset{\cdot\sqrt{x-2}\ge 0}{\Leftrightarrow} f(x)\cdot\sqrt{x-2}\ge(-2x+2)\sqrt{x-2}$.

Αφού οι συναρτήσεις $f(x)\cdot\sqrt{x-2}$ και $(-2x+2)\sqrt{x-2}$ είναι συνεχείς στο $[2,+\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=2$, τότε

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx>\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx.$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$

θέτω $\sqrt{x-2}=u\Leftrightarrow x-2=u^2$ τότε $dx=2udu$ και

- για $x=2$ είναι $u=0$,
- για $x=3$ είναι $u=1$.

Άρα,

$$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx = \int_0^1 \left[-2\left(u^2+2\right)+2\right]u\cdot 2u\,du = \int_0^1 \left(-2u^2-2\right)2u^2\,du =$$

$$= \int_0^1 \left(-4u^4-4u^2\right)du = \left[-4\cdot\frac{u^5}{5}-4\cdot\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{5}-\frac{4}{3} = -\frac{12}{15}-\frac{20}{15} = -\frac{32}{15}$$

Επομένως

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}\,.$$