ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ
ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ, 2024

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑ.Λ

(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 31.

Α2. (α′) Αν $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν με $\kappa \leq \nu$ τότε στη τιμή x_i αντιστοιχίζεται η (απόλυτη) συχνότητα ν_i, δηλαδή ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής στο σύνολο των παρατηρήσεων.

(β′) Αν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, \dots, w_n$ τότε ο σταθμικός μέσος δίδεται απ' τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + \cdots + w_\nu} = \frac{\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa w_\kappa}{\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} w_\kappa}$$

Α3. (α′) Λ (β′) Λ (γ′) Σ (δ′) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \dfrac{1}{3}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική) με παράγωγο $f'(x) = x^2 + 6x + 5$.

Β2. Για την f' ισχύει $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 36 - 20 = 16$ και άρα οι ρίζες αυτής είναι οι $x_1 = 5$ και $x_2 = 1$. Τότε,

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ και $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$ και γνησίως αύξουσα στο $[5, +\infty)$. Τέλος, παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_1 = 1$ ίσο με $f(1) = \frac{8}{3}$ και ολικό ελάχιστο στο $x_2 = 5$ ίσο με $f(5) = -8$. Διαγραμματικά, ο πίνακας μονοτονίας φαίνεται παρακάτω.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1) = \frac{8}{3}$	$\searrow$	$f(5) = -8$	$\nearrow$	

Β3. Η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο x_0 είναι η $y = \lambda x + \beta$. Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = f'(0) = 5$. Άρα,

$$y = 5x + \beta \tag{1}$$

Το σημείο $\mathrm{M}\,(0, f(0)) = \left(0, \frac{1}{3}\right) \in (1)$ άρα

$$\frac{1}{3} = 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{3}$$

Ο.Ε.Φ.Ε.

Επομένως, απ' την (1) παίρνουμε ότι η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτόμενης είναι $(\varepsilon) : y = 5x + \frac{1}{3}$.

B4. Είναι:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \xlongequal{\text{ορισμός παραγώγου}} f'(-1)$$
$$= (-1)^2 + 6\cdot(-1) + 5 = 12$$

ΘΕΜΑ Γ

Οι παρατηρήσεις είναι οι 22, 18, $20+\kappa$, 14, 16 όπου $\kappa \in \mathbb{R}$. Είναι CV = 20%.

Γ1. Είναι $s = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+6x-7}{2x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+7)\cancel{(x-1)}}{2\cancel{(x-1)}} = \dfrac{8}{2} = 4$ διότι το τριώνυμο x^2+6x-7 έχει $\Delta = 6^2 - 4\cdot(-7)\cdot 1 = 36+28 = 64$ και άρα $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-6\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1} = \dfrac{-6\pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 & = & -7 \\ x_2 & = & 1 \end{cases}$.

Γ2. $\text{CV} = \dfrac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow 0.2 = \dfrac{4}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow |\bar{x}| = \dfrac{4}{0.2} \Leftrightarrow |\bar{x}| = 20 \Leftrightarrow \bar{x} = \pm 20.$

Γ3.

- Αν $\bar{x} = 20$, τότε:

$$\bar{x} = \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} \Leftrightarrow 20 = \frac{90+\kappa}{5} \Leftrightarrow \kappa = 10$$

- Αν $\bar{x} = -20$, τότε:

$$\bar{x} = \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} \Leftrightarrow -20 = \frac{90+\kappa}{5} \Leftrightarrow \kappa = -190$$

η οποία απορρίπτεται ως μη ρεαλιστική.

Για την εύρεση της διαμέσου του δείγματος διατάσσουμε αυτό σε αύξουσα σειρά 14, 16, 18, 22, 30. Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό, η διάμεσος θα είναι η μεσαία παρατήρηση, δηλ. $\delta = 18$.

Γ4. Έστω $\bar{y}$ η μέση τιμή μετά την αύξηση κατά 10% και s' η τυπική απόκλιση μετά την αύξηση κατά 10%. Είναι $c = 1.1$. Τότε,

$$\bar{y} = c\bar{x} \Leftrightarrow \bar{y} = 1.1 \cdot 20 = 22 \quad (1)$$

$$s' = cs \Leftrightarrow s' = 1.1 \cdot 4 = 4.4 \quad (2)$$

Άρα, ο νέος συντελεστής μεταβολής είναι $\mathrm{CV}' = \dfrac{s'}{\bar{y}'} = \dfrac{4.4}{22} = 0.2$.

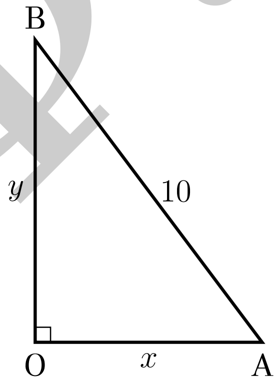
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι:

$$\mathrm{OB}^2 + \mathrm{OA}^2 = \mathrm{AB}^2 \quad (1)$$

Όμως, $\mathrm{OA} = x$, $\mathrm{OB} = y$ και $\mathrm{AB} = 10$. Συνεπώς, η (1) δίδει:

$$y^2 + x^2 = 100 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \quad (2)$$



Όμως, $y > 0$ άρα $y = \sqrt{100 - x^2}$. Για να ορίζεται η τελευταία παράσταση πρέπει $100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow (10 - x)(10 + x) > 0$. Κατασκευάζουμε το πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$		-10		10		$+\infty$
$10 - x$		$+$	0	$+$		$-$	
$10 + x$		$-$		$+$	0	$+$	
$(10-x)(10+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Συνεπώς, $x \in (-10, 10)$ και επειδή $x > 0$ έπεται $x \in (0, 10)$. Άρα, το πεδίο ορισμού της $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ είναι το $\mathcal{A} = (0, 10)$.

Ο.Ε.Φ.Ε.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι:

$$f'(x) = \left(\sqrt{100-x^2}\right)' = \frac{(100-x^2)'}{2\sqrt{100-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της f όταν $x=8$ ισούται με $f'(8)$, δηλ.

$$f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100-8^2}} = -\frac{8}{\sqrt{100-64}} = -\frac{8}{\sqrt{36}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Δ3. Είναι:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6} &= \lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}\\
&= \lim_{x\to 6}\frac{\left(\sqrt{100-x^2}-8\right)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}\\
&= \lim_{x\to 6}\frac{(100-x^2)-64}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}\\
&= \lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}\\
&= \lim_{x\to 6}\frac{(6-x)(6+x)}{(x-6)\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}\\
&= -\lim_{x\to 6}\frac{\cancel{(x-6)}(6+x)}{\cancel{(x-6)}\left(\sqrt{100-x^2}+8\right)}\\
&= -\frac{12}{\sqrt{100-36}+8}\\
&= -\frac{12}{16}\\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Δ4. Είναι $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}$. Επειδή $0<x<10$ είναι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,10)$. Συνεπώς, η f είναι γνησίως φθίνουσα. Παρατηρούμε ότι:

Ο.Ε.Φ.Ε.

$$2.3 = x_1 < 2.8 = x_3 < 3.5 = x_2 \xRightarrow{f \text{ γνησίως φθίνουσα}} f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$$

και το συμπέρασμα έπεται.

Ο.Ε.Φ.Ε.